

Μίνι διάλεξη

Επιτόκια και χρονική αξία του χρήματος

Δρ Παναγιώτης Χ. Ανδρέου

Αναπληρωτής Καθηγητής
Χρηματοοικονομικής
Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Κύπρου

Έπιτόκια: εισαγωγικές έννοιες



@financialwellbeinginstitute



@pandreou77



www.pandreou.com



panayiotis.andreou@cut.ac.cy

Οι βασικοί παράγοντες του χρήματος

Οι βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν το χρήμα είναι οι εξής δύο:

1. Η τιμή του χρήματος 
2. Ο χρόνος 

Ας ξεκινήσουμε με την τιμή του χρήματος: Ποια θα μπορούσε να είναι;

// Η τιμή του χρήματος είναι το επιτόκιο!



Επιτόκιο: ο ρυθμός αύξησης των αποταμιεύσεων

Το επιτόκιο μπορεί επίσης να οριστεί και ως:

// Ο ρυθμός αύξησης των αποταμιεύσεων



Όταν καταθέσουμε ένα χρηματικό ποσό σε τραπεζικό λογαριασμό:

// αυτό το χρηματικό ποσό αυξάνεται, και

// όσο υψηλότερο είναι το επιτόκιο, τόσο πιο γρήγορη θα είναι κι η αύξηση.



Επιτόκιο: το κόστος δανεισμού

Ωστόσο, το επιτόκιο δεν είναι μόνο ο τρόπος αύξησης των αποταμιεύσεων, είναι (δυστυχώς για τους περισσότερους από εμάς!) επίσης ο τρόπος που αυξάνεται και το χρέος.

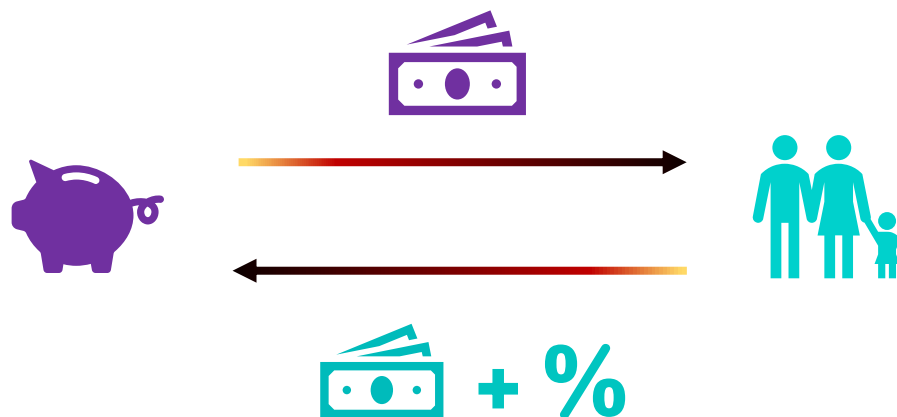
Συνεπαγωγικά, το επιτόκιο μπορεί να οριστεί και ως:

// Το κόστος δανεισμού 



Επιτόκιο: το κόστος ενοικίασης του χρήματος

Οι ελλειμματικές μονάδες (δανειολήπτες) «ενοικιάζουν» χρήματα από τις πλεονασματικές μονάδες (δανειστές/καταθέτες/επενδυτές) και το επιτόκιο είναι η τιμή που πληρώνουν για την «ενοικίαση» αυτή.



Ανατοκισμός



@financialwellbeinginstitute



@pandreou77



www.pandreou.com

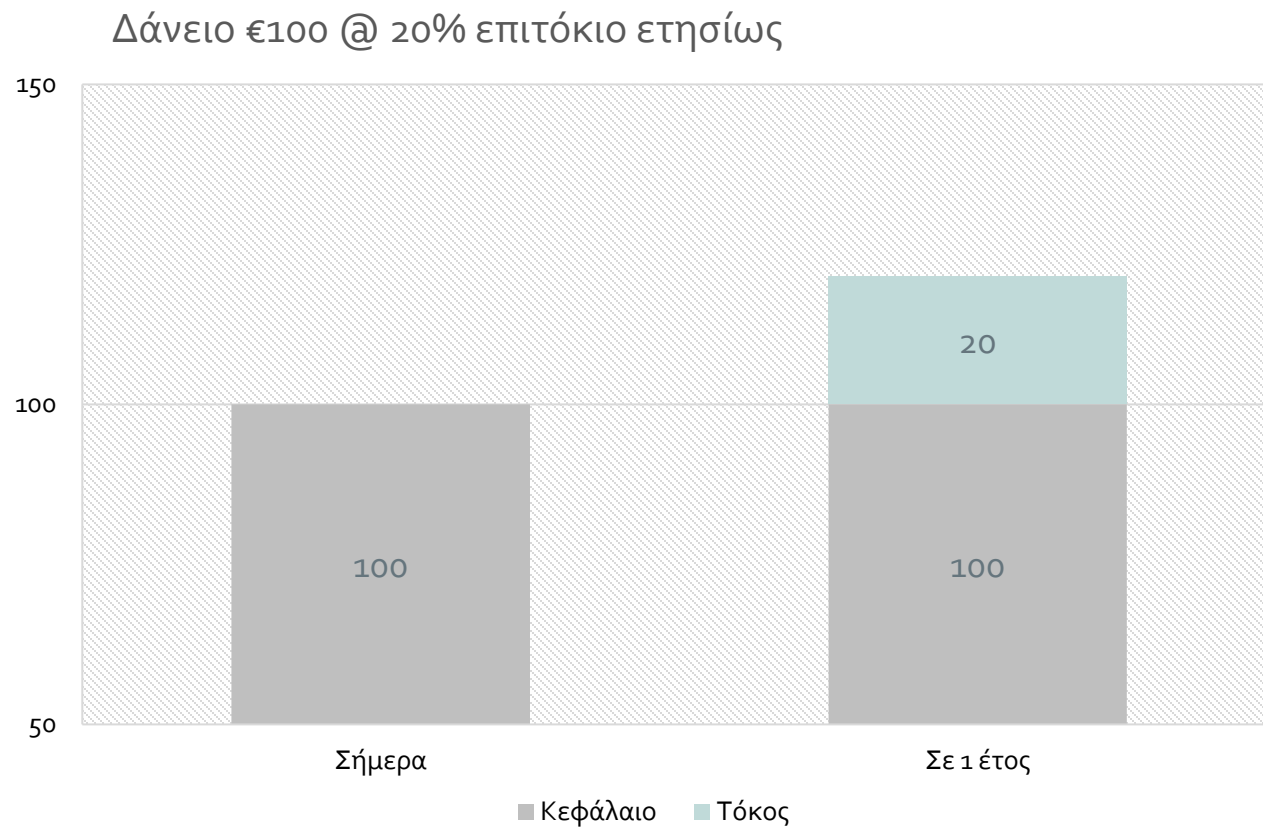


panayiotis.andreou@cut.ac.cy

Απλός τοκισμός

Αν δανειστώ €100 με επιτόκιο 20% ετησίως, σε 1 έτος θα χρωστάω:

- ❖ €100 κεφάλαιο, και
- ❖ €20 τόκους



Ανατοκισμός

Το παράδειγμα παραπάνω ήταν για τόκο ενός έτους. Τι συμβαίνει με τους τόκους αν ο δανεισμός είναι για παραπάνω έτη;



Όταν δανειζόμαστε για παραπάνω από ένα έτος, τότε εκτός από:

α) το κεφάλαιο, και

β) τους τόκους,

χρωστάμε και:

γ) τόκους επί των τόκων των προηγούμενων ετών



Ανατοκισμός

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε πως δανειστήκαμε με επιτόκιο 20% ετησίως τα €100 του προηγούμενου παραδείγματος, αλλά για **2 έτη** αυτή τη φορά.

Πόσα πρέπει να επιστρέψουμε στο τέλος των 2 ετών;



Ανατοκισμός

Απάντηση

// Μετά το 1^ο έτος, το χρέος έχει αυξηθεί σε €120 (τι πράξη κάναμε;)

// Στο 2^ο έτος, ο τόκος που εφαρμόζεται δεν είναι πάνω στο αρχικό δάνειο των €100, αλλά πάνω στο **νέο υπόλοιπο**: στα €120

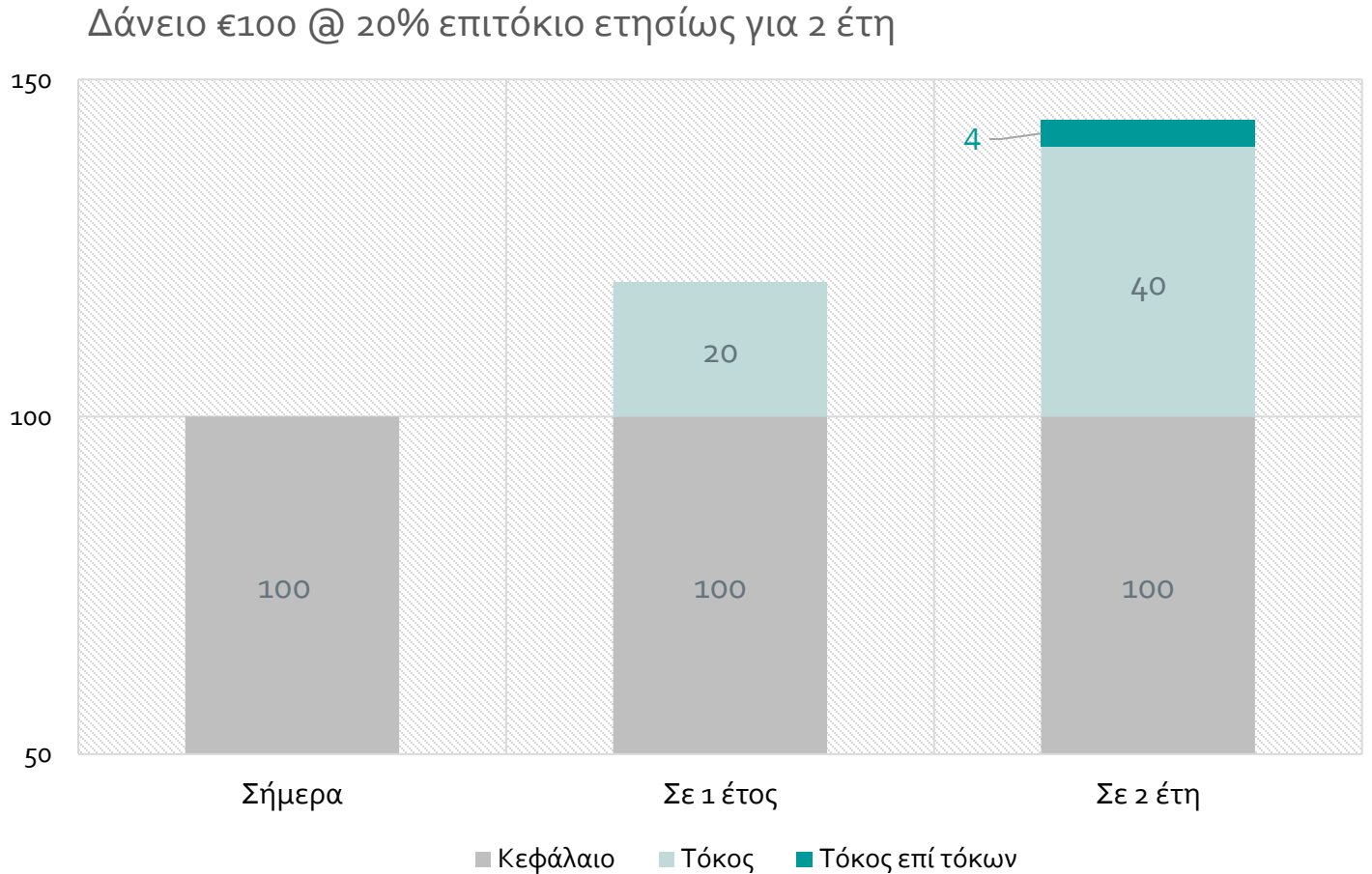
// Άρα μετά το 2^ο έτος, το χρέος έχει αυξηθεί σε $€120 \times 1,2 = €144$

Επομένως, βλέπουμε πως ο τόκος για 2 έτη δεν είναι $€20 + €20 = €40$, αλλά $€20 + €24 = €44$. Κι αυτό αφού υπάρχει κι ένας επιπλέον τόκος €4 στο 2^ο έτος, που προκύπτει από τον τοκισμό του 1^{ου} έτους.



Οπτικοποίηση του ανατοκισμού

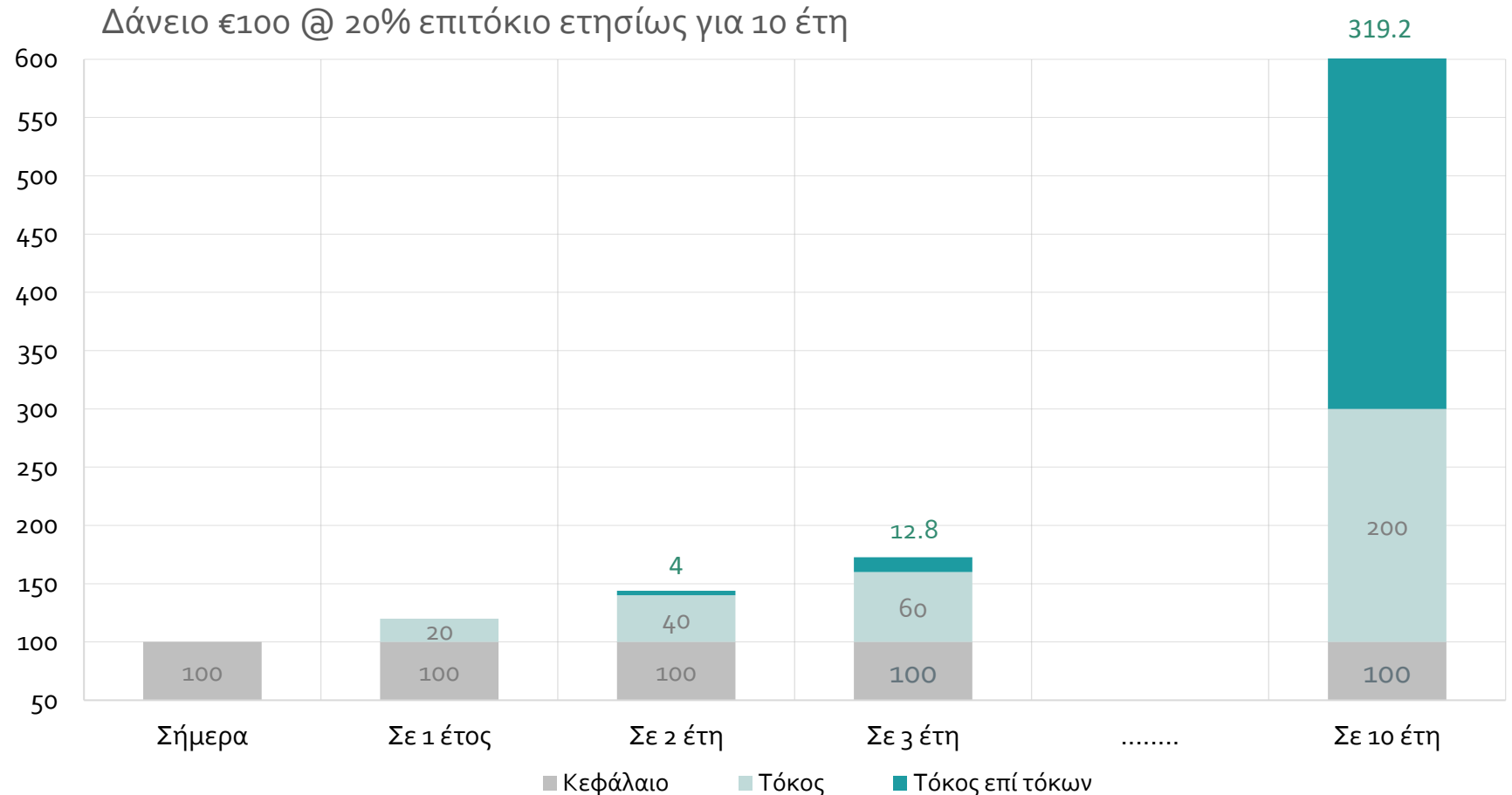
Ο συνολικός τόκος συγκεντρώνεται όχι μόνο στο κεφάλαιο, αλλά και στον ίδιο τον τόκο:



Οπτικοποίηση του ανατοκισμού

Οι τόκοι επί των τόκων αυξάνονται εκθετικά με την πάροδο του χρόνου.

Μετά από ορισμένα έτη, καταλήγουν να **υπερβαίνουν** το αρχικό κεφάλαιο μαζί με τους τόκους:



Φόρμουλα ανατοκισμού

Η γενική φόρμουλα ανατοκισμού είναι η εξής:

$$F = P (1+r)^t$$

Όπου:

F: Τελικό ποσό (από το *Future*)

P: Αρχικό ποσό (από το *Present*)

r: Επιτόκιο (από το *rate*)

t: Έτη (από το *time*)

Πρόκειται για εκθετικό τύπο: Καθώς αυξάνεται το χρονικό διάστημα *t*, το τελικό ποσό αυξάνεται ολοένα και πιο γρήγορα.



Φόρμουλα μελλοντικής και παρούσας αξίας

$$F = P (1+r)^t$$

Η φόρμουλα ανατοκισμού είναι γνωστή και ως φόρμουλα **Μελλοντικής Αξίας (ΜΑ)**

Ενώ αν λύσουμε ως προς P, προκύπτει η φόρμουλα **Παρούσας Αξίας (ΠΑ)**:

$$P = F / (1+r)^t$$



ΜΑ και κατάθεση: Πόσα θα έχω στο μέλλον; (2)

Αν επένδυνα €2.000 @ 8% στην ηλικία των **55 ετών**, στα 65 θα είχα:

$$F = P \times (1 + r)^t = 2.000 \times (1 + 8\%)^{(65-55)} = €4.318$$



Αν επένδυνα €2.000 @ 8% στην ηλικία των **25 ετών**, στα 65 θα είχα:

$$F = P \times (1 + r)^t = 2.000 \times (1 + 8\%)^{(65-25)} = €43.449$$



Αποταμιεύστε/επενδύστε νωρίς!



ΠΑ και κατάθεση: Πόσα θα χρειαστώ σήμερα;

// Αν ένας γονιός θεωρεί πως θα χρειαστούν €50.000 για την πανεπιστημιακή εκπαίδευση του παιδιού του και ξεκινάει να αποταμιεύει σε επιτόκιο 5%, όταν το παιδί είναι **15 ετών** -δηλαδή 3 χρόνια πριν χρειαστούν τα χρήματα- θα χρειαστεί να επενδύσει:

$$P = \frac{F}{(1+r)^t} = \frac{50.000}{(1+5\%)^3} = €43.192$$



// Αν ωστόσο είχε ξεκινήσει την αποταμίευση ταυτόχρονα με την **γέννηση** του παιδιού, τότε θα χρειαζόταν:

$$P = \frac{F}{(1+r)^t} = \frac{50.000}{(1+5\%)^{18}} = €20.776$$



ΜΑ και δανεισμός: Πόσα θα πληρώσω στο μέλλον;

Όταν μιλάμε για ανατοκισμό σε χρέος, τότε πρόκειται για άσχημα νέα!

Ένας φοιτητής στο ξεκίνημα των σπουδών του αγοράζει μέσω πιστωτικής κάρτας ένα νέο **laptop** αξίας €1.500. Η τράπεζα χρεώνει επιτόκιο 15% ετησίως στο πιστωτικό υπόλοιπο. Ας υποθέσουμε πως χρειάζεται 4 έτη για να τελειώσει το πανεπιστήμιο και 1 έτος ώσπου να πάρει τον πρώτο του μισθό.

Το χρέος του μετά το πέρας της 5ετίας θα έχει ανέλθει σε:

$$F = P \times (1 + r)^t = 1.500 \times (1 + 15\%)^5 = \mathbf{€3.017}$$

θα έχει δηλαδή υπερδιπλασιαστεί!



Επενδύοντας σε υψηλά επιτόκια

Σημαντικό ρόλο παίζει επίσης -ειδικά μακροχρόνια- και το ύψος του επιτοκίου. Η επένδυση σε υψηλά επιτόκια κάνει την διαφορά.

// Αν καταθέσεις €1.000 σε έναν τραπεζικό λογαριασμό που δίνει τόκο 2% ετησίως, σε 40 έτη θα έχεις συσσωρεύσει υπερδιπλάσιο ποσό:

$$F = P \times (1 + r)^t = 1.000 \times (1 + 2\%)^{40} = €2.208$$

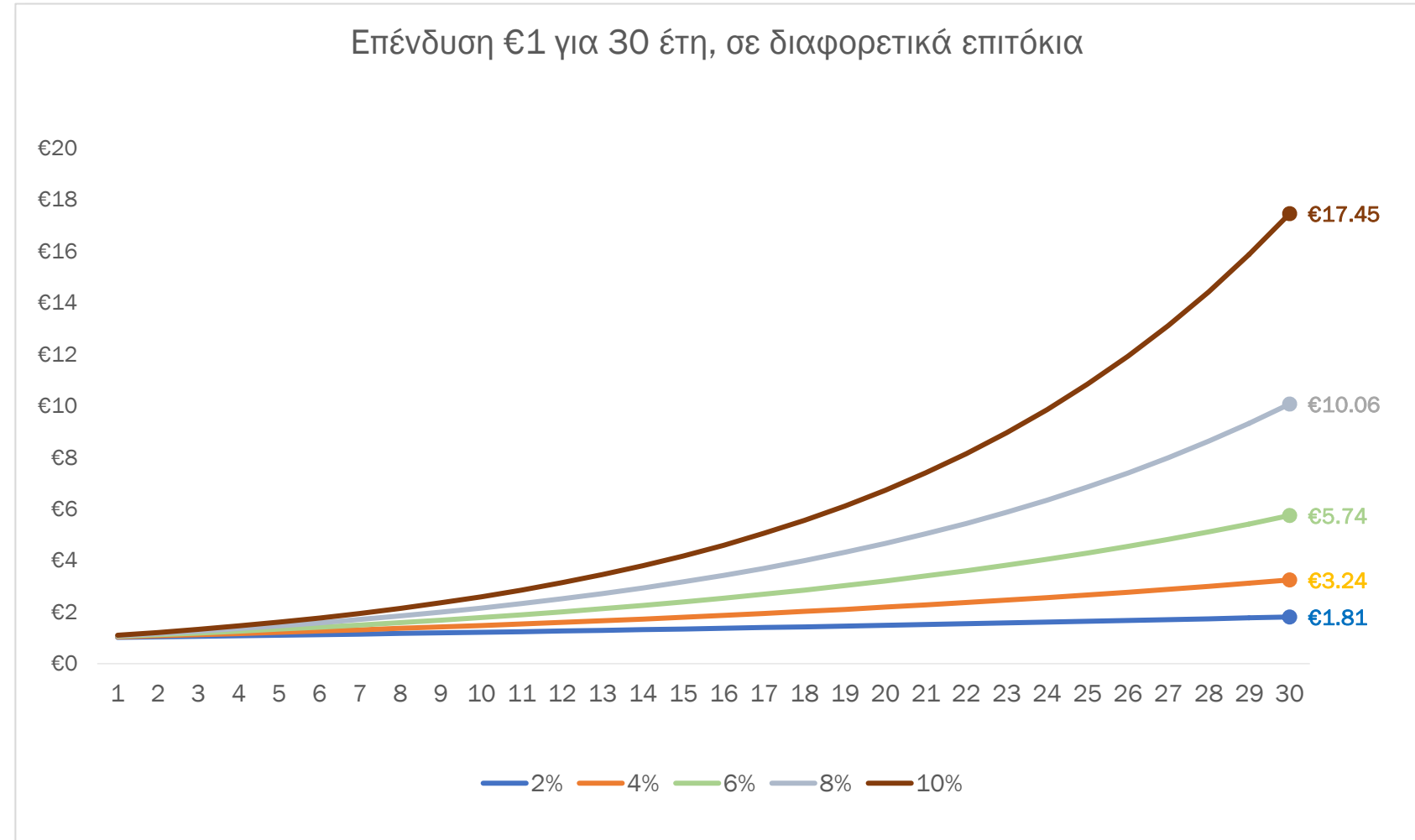
// Αν όμως επενδύσεις €1.000 σε μετοχές και καταφέρεις να κερδίζεις 10% ετησίως, σε 40 έτη θα έχει πολλαπλασιαστεί η αρχική επένδυση:

$$F = P \times (1 + r)^t = 1.000 \times (1 + 10\%)^{40} = €45.259$$



Επενδύοντας σε υψηλά επιτόκια

Όσο υψηλότερο είναι το επιτόκιο, τόσο μεγαλύτερη είναι κι η επίδραση του ανατοκισμού, προϊόντος του χρόνου.



Παρούσα Αξία



@financialwellbeinginstitute



@pandreou77



www.pandreou.com



panayiotis.andreou@cut.ac.cy

Παρούσα αξία

Επιστρέφουμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Αν το επιτόκιο στην αγορά είναι 4% ετησίως, πόσο αξίζει **σήμερα** το ποσό των €10.000 εισπρακτέο σε 2 χρόνια;

Όπως είδαμε και νωρίτερα, λύνουμε τον τύπο ανατοκισμού ως προς P:

$$P = \frac{F}{(1+r)^t} = \frac{10.000}{(1+4\%)^2} = €9.245$$

Το ποσό των €9.245 είναι η **Παρούσα Αξία** των €10.000 σε 2 έτη.



Χρησιμότητα της παρούσας αξίας

Η Παρούσα Αξία (ΠΑ) θεωρείται ο ακρογωνιαίος λίθος των χρηματοοικονομικών. Χρησιμοποιείται ευρέως για να τιμολογηθεί κάθε είδους πρότζεκτ ή επένδυση που περιλαμβάνει ταμειακές **εισροές** ή **εκροές** στο μέλλον, και θέλουμε να βρούμε τη σημερινή τους αξία για να μπορέσουμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα.

Αποφασίζετε με έναν φίλο να ξεκινήσετε μια επιχείρηση δημιουργίας ιστοσελίδων.

// Θα χρειαστείτε αρχικό κεφάλαιο €25.000 έκαστος

// Θα κερδίζετε κατά μ.ο. €3.000 έκαστος για τα επόμενα 10 χρόνια



Αξίζει;



Χρησιμότητα της παρούσας αξίας

Δεν μπορούμε να απαντήσουμε αμέσως, καθώς οι €25.000 σήμερα δεν είναι συγκρίσιμες με το συνολικό ποσό των €30.000 των απολαβών σε βάθος 10ετίας. Το αν αξίζει ή όχι θα εξαρτηθεί από το επιτόκιο αφού:

// Αν η (Παρούσα Αξία των 10 x €3.000) > €25.000, τότε αξίζει. Ή:

// Αν η (Παρούσα Αξία των 10 x €3.000) - €25.000 > 0, τότε αξίζει.

Το παραπάνω συνηθίζουμε να το ονομάζουμε **Καθαρή Παρούσα Αξία (ΚΠΑ)**.

ΚΠΑ = ΠΑ **εισροών** - ΠΑ **εκροών**.



Case study:

«Τιμολογώντας» ένα μεταπτυχιακό



@financialwellbeinginstitute



@pandreou77



www.pandreou.com



panayiotis.andreou@cut.ac.cy

«Τιμολογώντας» ένα μεταπτυχιακό

Ας δούμε μια περίπτωση με συχνή εφαρμογή στην καθημερινότητα:

Η Χριστίνα πήρε το πτυχίο της στο πρόσφατο παρελθόν και σήμερα εργάζεται βγάζοντας €1.200/μήνα. Ενδιαφέρεται για ένα μεταπτυχιακό στο ΤΕ.ΠΑ.Κ που κοστίζει €4.100, αλλά πιστεύει πως δεν θα καταφέρει και τα δύο εξίσου καλά αν τα κάνει παράλληλα.

Σκέφτεται, επομένως, να σταματήσει για 1 έτος από την εργασία της για να κάνει το μεταπτυχιακό, αλλά έχει αμφιβολίες αν αξίζει.

Ας βοηθήσουμε την Χριστίνα να αποφασίσει!



«Τιμολογώντας» ένα μεταπτυχιακό

Ποιο είναι το οικονομικό κόστος της απόφασης;

// Το **εμφανές** κόστος: Το κόστος εγγραφής στο μεταπτυχιακό (το οποίο ας θεωρήσουμε πως είναι προπληρωτέο)

// Το **αφανές** κόστος: Τα διαφυγόντα έσοδα, δηλαδή οι μισθοί ενός έτους.



«Τιμολογώντας» ένα μεταπτυχιακό

Ποιο είναι το οικονομικό όφελος της απόφασης;

// Η πιθανή αύξηση του μισθού της Χριστίνας όταν αποφοιτήσει.

Σύμφωνα με την QS, εταιρεία που εξειδικεύεται στις αναλύσεις της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, το 'masters premium' ανέρχεται σε 20% παγκοσμίως. Επομένως, ας κάνουμε προσωρινά τις εξής υποθέσεις:

1. Ο μισθός αναμένεται να ανέβει **20%** στα €17.280 (=14.400 x 1,2)
2. Τα **επιτόκια** σήμερα βρίσκονται στο **5%** ετησίως
3. Έστω πως έχει 40 έτη από σήμερα ώσπου να συνταξιοδοτηθεί



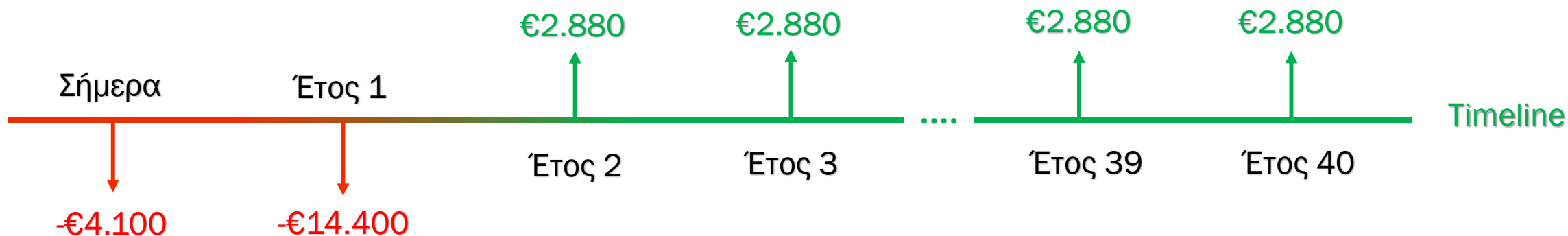
«Τιμολογώντας» ένα μεταπτυχιακό

Ας τοποθετήσουμε τις ταμειακές ροές της απόφασης, μέσα στον χρόνο:

// - €4.100 το κόστος του μεταπτυχιακού σήμερα

// - €14.400 από την εργασία της για το επόμενο έτος

// + €2.880/έτος (= 17.280 - 14.400) για 39 έτη αφού αποφοιτήσει



«Τιμολογώντας» ένα μεταπτυχιακό

Πλέον είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε την αξία του μεταπτυχιακού:

$$\text{ΚΠΑ}_{\text{master}} = -4.100 + \frac{-14.400}{1,05} + \frac{2.880}{1,05^2} + \frac{2.880}{1,05^3} + \dots + \frac{2.880}{1,05^{40}} = \text{€}28.861$$

Η Χριστίνα αναμένεται να έχει κέρδος €28.861 σε σημερινές αξίες, στην διάρκεια της σταδιοδρομίας της, αν επιλέξει να κάνει το μεταπτυχιακό.



Ανάλυση ευαισθησίας

Η απάντηση αυτή ωστόσο γίνεται στην βάση 2 εικασιών:

// της αύξησης μισθού κατά 20%, και

// του ετήσιου επιτοκίου 5%.

Η αύξηση μισθού δεν είναι εξασφαλισμένη/σταθερή, ενώ το επιτόκιο ακόμη κι αν είναι αντιπροσωπευτικό για σήμερα, μπορεί να μην είναι στο μέλλον.

Ένας τρόπος «πρόνοιας» για το παραπάνω, είναι να υπολογίσουμε την ΚΠΑ για διάφορες πιθανές αυξήσεις και διάφορα επιτόκια.



Ανάλυση ευαισθησίας

Στον πίνακα βλέπουμε τις ΚΠΑ για διάφορα ύψη επιτοκίων και μισθών.

Μερικά συμπεράσματα:

// Αν η Χριστίνα βρεθεί με μια μικρή αύξηση για όλη της τη σταδιοδρομία και παράλληλα το μέσο επιτόκιο κατά τη διάρκεια της 40ετίας παραμείνει σχετικά ψηλά, το μεταπτυχιακό θα αποδεικνυόταν ζημιογόνο!

// Σε υψηλά μισθολογικά κλιμάκια ωστόσο, πολλώ δε μάλλον συνδυασμένα με χαμηλό μέσο επιτόκιο, η σημερινή αξία του μεταπτυχιακού είναι τεράστια.

Συντηρητικό σενάριο
αύξησης €100/μήνα

Αύξηση 20% (QS)

Επιτόκιο	Μισθός με μεταπτυχιακό				
	15.600	17.280	20.000	25.000	40.000
3%	8.492	45.694	105.925	216.645	548.803
4%	4.651	36.288	87.509	181.665	464.133
5%	1.634	28.861	72.943	153.977	397.077
6%	-761	22.931	61.291	131.806	343.349
7%	-2.681	18.146	51.866	113.852	299.809
8%	-4.235	14.243	44.159	99.153	264.133
9%	-5.503	11.028	37.793	86.992	234.591
10%	-6.547	8.355	32.481	76.831	209.880



Η δύναμη της γνώσης

Χωρίς γνώση της έννοιας της χρονικής αξίας του χρήματος, κάποιος πιθανώς θα έκανε την εξής απλοϊκή πράξη, αν ανέμενε αύξηση €1.200 το χρόνο:

// Κόστος: - €18.500 (= - 14.400 - 4.100)

// Κέρδος: €46.800 (= 1.200 x 39)

// Καθαρό κέρδος: €28.300 (= 46.800 - 18.500)

Που όπως είδαμε στον προηγούμενο πίνακα, από ένα ύψος επιτοκίων και πάνω, θα οδηγούσε σε **λανθασμένη** απόφαση.



**PERSONAL
FINANCE**



**Dr Panayiotis C.
Andreou**



**panayiotis.andreou
@cut.ac.cy**



#FinancialWellbeingCY

URL: www.pandreou.com